



مرکز مشاوره قلم چی

مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: -

تاریخ برگزاری:

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

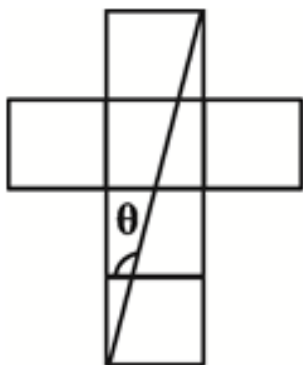
بارم: ۱

①

اگر مساحت یک شش ضلعی منتظم برابر $9\sqrt{3}$ باشد، اندازه قطر کوچک آن کدام است؟

②

اگر شکل مقابل باز شده یک مکعب به ضلع واحد باشد، مقدار $\sin \theta$ کدام است؟



تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

بارم: ۱

③

دو مثلث ABC و EFG را در نظر بگیرید به طوری که $AB = \frac{1}{4}EF$ و $AC = 3EG$ باشد و زاویه‌های A و E برابر باشند، آن‌گاه نسبت مساحت ABC به مساحت EFG کدام است؟

تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

بارم: ۱

④

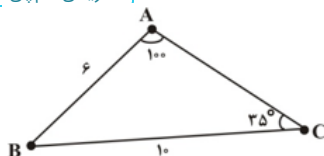
حاصل عبارت $A = \left(\frac{\tan 30^\circ}{\cot^2 30^\circ - 1}\right) \left(\frac{\sin^2 60^\circ}{\cos^2 45^\circ}\right)$ کدام است؟

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸ ساده

بارم: ۱

⑤

در شکل مقابل مساحت مثلث ABC را به دست آورید.



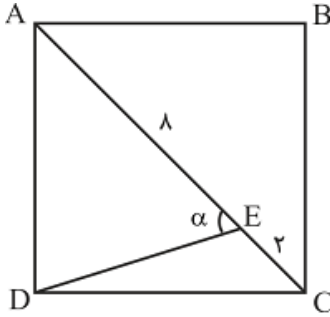
۶

اگر $ABCD$ یک مربع باشد، آن گاه $\tan \alpha$ کدام است؟ ($EC = 2$, $AE = 8$)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱



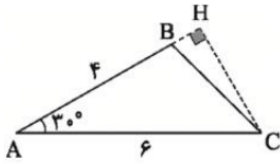
۷

در مثلث ABC ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، $AC = 6$ و $AB = 4$ است. در این صورت طول ارتفاع CH کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

بارم: ۱



۸

مساحت پنج ضلعی منتظم به طول ضلع a کدام است؟

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

بارم: ۱

$$(\sin 54^\circ = \cos 36^\circ = 0/8, \sin 36^\circ = \cos 54^\circ = 0/6)$$

۹

شخصی با قد ۱۸۰ سانتی متر در ۱۲ متری یک درخت و بر روی زمین صاف ایستاده است. اگر این فرد نوک درخت را با زاویه 13° نسبت به خط افق ببیند، طول درخت چند متر است؟ ($\tan 13^\circ \approx 0/23$)

ساده

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

۱۰

در مثلث قائم الزاویه ABC ، ($\hat{A} = 90^\circ$)، $\cos \hat{B} = \frac{5}{7}$ است. ارتفاع AH را رسم می کنیم. اگر $HB = 15$ باشد، اندازه وتر مثلث ABC کدام است؟

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

۱۱

در مثلث ABC که $\hat{A} = 90^\circ$ است، اگر $\tan \hat{B} = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار عبارت $\cos \hat{A} + \cos \hat{B} - \cos \hat{C}$ را بیابید.

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

بارم: ۱.۵

۱۲

در یک متوازی الاضلاع یکی از قطرهای دو برابر دیگری و زاویه بین دو قطر 30° است. اگر مساحت متوازی الاضلاع ۳۲ باشد، اندازه قطر کوچک آن چه قدر است؟

دشوار

تشریحی ۱۳۹۹

بارم: ۱

۱۳

شخصی که دارای قد یک متر و هشتاد سانتی متر است، بادبادکی را به هوا فرستاده است. در لحظه ای که ۴۰ متر از نخ را رها کرده است، زاویه بین راستای نخ و سطح زمین 30° درجه است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین را بیابید.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

بارم: ۱.۵

۱۴

مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{2 \tan^2 60^\circ - 2 \sin 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ \cot^2 45^\circ}$$

بارم: ۱.۵

۱۵

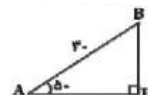
اضلاع متوازی‌الاضلاعی به طول ۱۱ و ۱۲ واحد است. در صورتی که زاویه‌ی بین این دو ضلع 120° باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

بارم: ۱

۱۶

طول نخ بادبادکی که کاملاً کشیده شده، ۳ متر است. این نخ با سطح زمین زاویه‌ی 50° می‌سازد. فاصله بادبادک تا سطح زمین را به دست آورید. ($\sin 50^\circ = 0.77$)

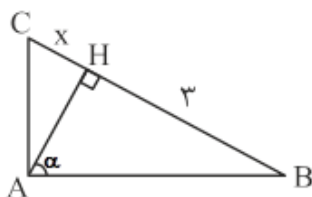
بارم: ۱



۱۷

با توجه به شکل زیر، حاصل x کدام است؟ (مثلث ABC در رأس A قائمه بوده و AH ارتفاع وارد بر وتر است.)

بارم: ۱



۱۸

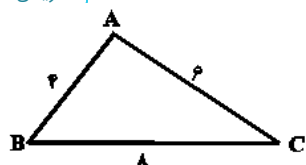
در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، زاویه A قائمه و $\tan C = \frac{5}{13}$ است. حاصل $\cos B + \cos C$ کدام است؟

بارم: ۱

۱۹

در مثلث روبه‌رو، حاصل $2 \cos \hat{B} + 3 \cos \hat{C}$ چقدر است؟

بارم: ۱



۲۰

اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، که طول اضلاع آن یک دنباله حسابی را تشکیل می‌دهند، برابر ۶ واحد مربع باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin B + \cos B}{\tan C}$ کدام می‌تواند باشد؟

بارم: ۱

۲۱

اگر داشته باشیم $\cos \alpha + \cot \alpha < 0$ و $\cos^3 \alpha \times \cot \alpha > 0$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟

بارم: ۱

۲۲

حاصل مجموع حداکثر مقدار عبارت $A = 3 - 2 \cos x$ با حداقل مقدار عبارت $B = 2 + 3 \sin^2 y$ کدام است؟

بارم: ۱

۲۳

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر انتهای کمان θ در ربع چهارم مثلثاتی و $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ باشد، حاصل $\sin \theta + \cos \theta \cot \theta$ کدام است؟

بارم: ۱

۲۴

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

اگر $\sin^2 \alpha \cos \alpha < 0$ و $\cos \alpha \tan \alpha < 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

بارم: ۱

۲۵

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

اگر $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ و انتهای کمان α در ناحیه چهارم باشد، حاصل $\cos \alpha + 2 \tan \alpha$ کدام است؟

بارم: ۱

۲۶

تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

اگر $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ و انتهای کمان α روی دایره مثلثاتی نقطه P باشد که در ناحیه دوم محورهای مختصات واقع است، مجموع بارم: ۱ مؤلفه‌های اول و دوم مختصات نقطه P کدام است؟

۲۷

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹ متوسط

اگر $30^\circ \leq \theta < 120^\circ$ محدوده تغییرات $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را به دست آورید.

بارم: ۲

۲۸

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

اگر $1 - \sin \theta = \frac{5}{4}$ و $\cot \theta \sin \theta > 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

بارم: ۱

۲۹

تشریحی ۱۳۹۶ متوسط

اگر $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ و $\cos \alpha = \frac{1-2m}{3}$ باشد، حدود m کدام بازه است؟

بارم: ۱

۳۰

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸ متوسط

اگر $-90^\circ < \alpha < -180^\circ$ باشد و $\tan \alpha = 2$ باشد، مطلوب است:

بارم: ۲.۵

الف) زاویه α را به طور تقریبی روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.

۳۱

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷ متوسط

اگر $\cot \alpha = -2$ باشد و انتهای کمان α روی دایره مثلثاتی نقطه P باشد که در ناحیه چهارم محورهای مختصات واقع است، مختصات نقطه P را بیابید.

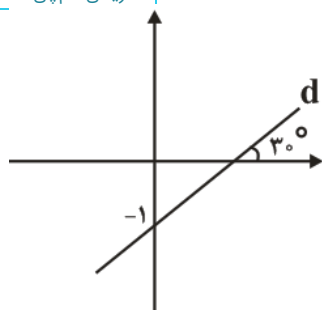
بارم: ۲

۳۲

تشریحی قلمچی ۱۳۹۵ متوسط

با توجه به شکل زیر معادله ی خط d را بنویسید.

بارم: ۱



۳۳

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

اگر $\cos \theta < 0$ و $\frac{2 + \sin \theta + 2 \cos \theta + \sin \theta \cos \theta}{\tan \theta} > 0$ باشد، انتهای کمان θ در کدام ناحیه دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

بارم: ۱

۳۴

تشریحی ۱۳۹۸ ساده

اگر داشته باشیم $\tan \theta < 0$ و $\cos \theta \cot \theta < 0$ ، زاویه θ در کدام ناحیه مثلثاتی واقع شده است؟

بارم: ۱

(۳۵)

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

اگر داشته باشیم $\cos \alpha + \cot \alpha < 0$ و $\cos^3 \alpha \cdot \cot \alpha > 0$ آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

بارم: ۱

(۳۶)

متوسط تشریحی ۱۳۹۸

اگر داشته باشیم $\cos \alpha + \cot \alpha < 0$ و $\cos^3 \alpha \cdot \cot \alpha > 0$ ، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می‌گیرد؟

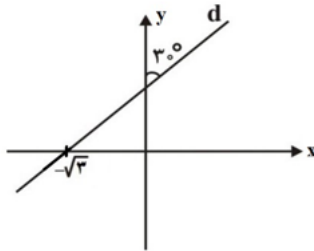
بارم: ۱

(۳۷)

ساده تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

در شکل مقابل معادله خط d را به دست آورید.

بارم: ۲



(۳۸)

متوسط تشریحی ۱۳۹۸

اگر $2 < (\sin \alpha)(1 - \cos \alpha) < 2$ باشد، در این صورت انتهای کمان α در کدام یک از ناحیه‌های دایره مثلثاتی قرار دارد؟

بارم: ۱

(۳۹)

ساده تشریحی ۱۳۹۴

در کدام نواحی از دایره‌ی مثلثاتی، $\tan \alpha > \sin \alpha$ است؟

بارم: ۱

(۴۰)

دشوار تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۶

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

بارم: ۱.۲۵

$$\frac{\sin 30^\circ + \sqrt{3} \cos 30^\circ}{\tan 45^\circ - \cot^2 27^\circ}$$

(۴۱)

دشوار تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۶

اگر $\tan \theta = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\frac{3 \sin \theta + 5 \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$ را به دست آورید.

بارم: ۱.۵

(۴۲)

متوسط تکاج ۱۳۸۴

بررسی کنید که آیا $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$ ، یک اتحاد است.

بارم: ۱

(۴۳)

متوسط تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید. (عبارات تعریف شده هستند.)

بارم: ۲

$$\text{الف) } \sin^6 \theta - \cos^6 \theta = 1 - 2 \cos^2 \theta$$

$$\text{ب) } (\sin \theta - \cos \theta)^2 + 2 \cot \theta \sin^2 \theta = 1$$

(۴۴)

دشوار تشریحی ۱۳۹۷

اگر $\frac{\cos \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\sqrt{27}}{8}$ و انتهای کمان α در ربع اول دایره مثلثاتی باشد، آنگاه مقدار $\cot \alpha$ چقدر است؟

بارم: ۱

(۴۵)

ساده تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۶

درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

بارم: ۰.۷۵

$$(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)(1 + \tan^2 \theta) = 1$$

(۴۶)

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

حاصل عبارت تعریف شده $1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\tan^2 \alpha - 1}}$ همواره کدام است؟

بارم: ۱

(۴۷)

تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

حاصل عبارت تعریف شده $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} - 2\tan^2\theta$ کدام است؟

بارم: ۱

(۴۸)

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

هر گاه $\cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = a$ باشد، حاصل $1 + \cot^2 x$ بر حسب a همواره کدام است؟ ($a \in R$)

بارم: ۱

(۴۹)

متوسط تشریحی ۱۳۹۸

حاصل عبارت تعریف شده $\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x(1-\cos x)}$ همواره کدام است؟

بارم: ۱

(۵۰)

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

اگر $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $3\cos\alpha - \sin\alpha = 1$ باشد، حاصل $\sin\alpha + \cos\alpha$ چقدر است؟

بارم: ۱

(۵۱)

متوسط تشریحی ۱۳۹۸

اگر $\cos\theta = A$ باشد، حاصل عبارت $(1 - \sin^2\theta)(2 + \tan^2\theta)$ بر حسب A همواره کدام است؟

بارم: ۱

(۵۲)

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

اگر $0 < x < 90^\circ$ باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} - \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ همواره کدام است؟

بارم: ۱

(۵۳)

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر $45 = 8\tan^2\alpha + 7\tan^4\alpha$ باشد، حاصل $7\cos^2\alpha + 1$ کدام است؟

بارم: ۱

(۵۴)

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

اگر $\frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x} = 2$ و x بر حسب درجه ($0 \leq x \leq 180^\circ$) باشد، حاصل عبارت $A = \sin(180^\circ + x) + \cos(180^\circ + x) + \cos 2x$ کدام است؟

بارم: ۱

(۵۵)

تکاج ۱۳۸۴ دشوار

بررسی کنید که آیا $\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$ یک اتحاد است.

بارم: ۱

(۵۶)

متوسط تشریحی ۱۳۹۹

اگر انتهای کمان α در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، حاصل عبارت $A = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} \times \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$ همواره کدام است؟

بارم: ۱

(۵۷)

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

عبارت $A = \frac{(1 - \sin^2\alpha)(1 + \sin^2\alpha) + (1 - \cos^2\alpha)(1 + \cos^2\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ همواره برابر کدام است؟ (عبارت تعریف شده است.)

بارم: ۱

(۵۸)

متوسط تشریحی ۱۳۹۷

حاصل عبارت $A = \tan 20^\circ \left(1 - \frac{1}{\sin^2 20^\circ}\right)$ کدام است؟

بارم: ۱

(۵۹)

تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

حاصل عبارت $A = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}$ همواره کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند.)

بارم: ۱

(۶۰)

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

اگر $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ و $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 14$ باشد، مقدار $\sin\alpha - \cos\alpha$ کدام است؟

بارم: ۱

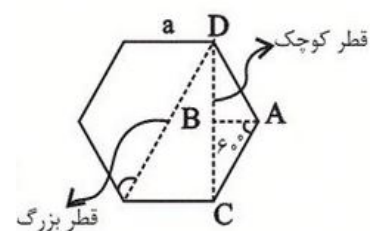
دشواری

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱

شش ضلعی منتظم به ضلع a از شش مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a تشکیل شده است، پس مساحت آن برابر است با:



$$S = 6 \times \frac{1}{2} \times a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 9\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$$

با استفاده از تقارن داریم:

$$DC = 2BC = 2AC \sin 60^\circ = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

نکته: در شش ضلعی منتظم به طول ضلع a داریم:

الف) طول قطر کوچک آن $a\sqrt{3}$ است.

ب) طول قطر بزرگ آن $2a$ است.

ج) مساحت آن $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ است.

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

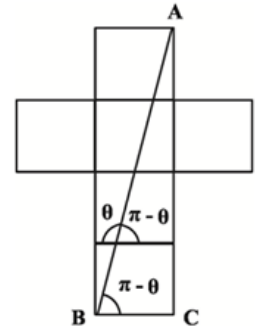
سوال ۲

می‌دانیم $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ است، پس برای محاسبه $\sin \theta$ ، می‌توانیم در مثلث ABC سینوس زاویه $(\pi - \theta)$ را محاسبه کنیم. با توجه به رابطه فیثاغورس ضلع AB را به دست می‌آوریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow AB = \sqrt{17}$$

بنابراین داریم:

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$



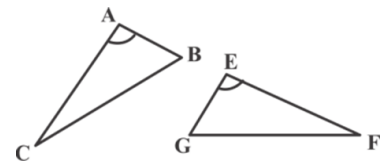
متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳

با توجه به فرمول مساحت مثلث داریم:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2} EF \times EG \times \sin \hat{E}$$

از طرفی چون \hat{A} و \hat{E} برابر هستند، پس $\sin \hat{E}$ و $\sin \hat{A}$ با هم برابرند، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle EFG}} = \frac{\frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}}{\frac{1}{2} EF \times EG \times \sin \hat{E}} = \frac{\frac{1}{2} EF \times 3EG}{EF \times EG} = \frac{3}{2}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3-1}\right) \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\tan 60^\circ = \sqrt{3}} A = \frac{\tan 60^\circ}{2}$$

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۵

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (100^\circ + 35^\circ) = 45^\circ$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin 45^\circ$$

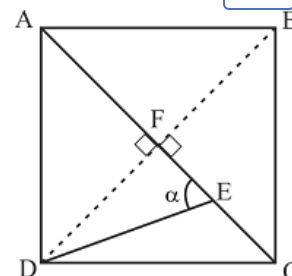
$$= 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۶



اگر قطر دیگر مربع را رسم کنیم تا همدیگر را در نقطه F قطع کنند می‌دانیم قطرهای مربع برهم عمودند و همدیگر را نصف می‌کنند. با توجه به این که قطر مربع ۱۰ می‌باشد، در مثلث DEF داریم:

$$\tan \alpha = \frac{DF}{EF} = \frac{AC \div 2}{CF - CE} = \frac{10 \div 2}{5 - 2} = \frac{5}{3}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۷

مساحت مثلث را از دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 30^\circ = 6$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} \times 4 \times CH = 2CH$$

$$\Rightarrow 2CH = 6 \Rightarrow CH = 3$$

دشوار

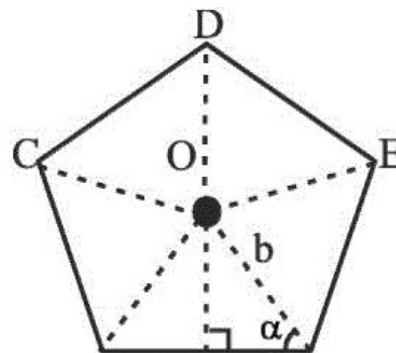
تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۸

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$\widehat{AOH} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$



$$B \quad \frac{a}{2} \quad H \quad \frac{a}{2} \quad A$$

$$\alpha = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

$$\cos 54^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{6}{10}b \Rightarrow b = \frac{a}{1/2}$$

$$\text{مساحت مثلث } AOB = \frac{1}{2}ab \sin 54^\circ = \frac{1}{2}a \times \frac{a}{1/2} \times \frac{8}{10} = \frac{a^2}{3}$$

$$\text{مساحت پنج ضلعی منتظم} = 5 \times \text{مساحت مثلث } AOB = \frac{5}{3}a^2$$

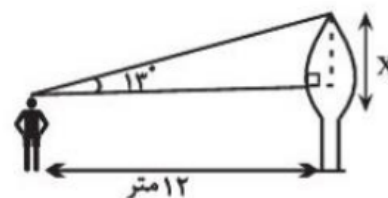
ساده

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۹

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \tan 13^\circ = \frac{x}{12}$$



$$\Rightarrow \frac{23}{100} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 2/76 \text{ متر}$$

قد فرد هم ۱/۸ متر است پس طول درخت $2/76 + 1/8 = 4/56$ متر است.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

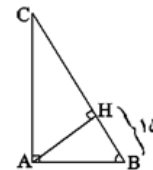
گزینه درست: null

سوال ۱۰

$$\triangle ABH : \cos \hat{B} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow \frac{5}{v} = \frac{15}{AB} \Rightarrow AB = 3v$$

$$\triangle ABC : \cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{v} = \frac{3v}{BC} \Rightarrow BC = \frac{3v \times v}{5}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{29v}{5} = 29/5$$



ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۱۱

مثلث ABC را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

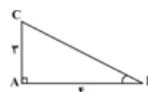
$$BC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC = 5$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \hat{A} = \cos 90^\circ = 0$$

$$\cos \hat{A} + \cos \hat{B} - \cos \hat{C} = 0 + \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$



دشوار

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۲

قطرها را $2x$ و $4x$ می‌گیریم:

$$S_{\text{متوازی الضلع}} = 4 \times \left(\frac{1}{2} x \times 2x \times \sin 30^\circ \right)$$

$$\Rightarrow 32 = 4x^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

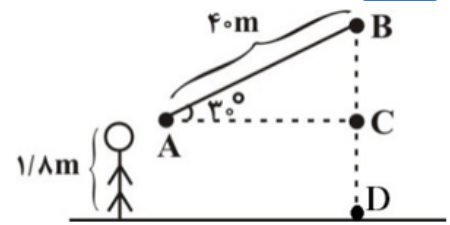
پس قطرها ۸ و ۱۶ هستند.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱۳



$$\begin{aligned}\sin 3^\circ &= \frac{BC}{AB} \\ \Rightarrow \frac{1}{8} &= \frac{BC}{40} \\ \Rightarrow BC &= 5 \text{ m}\end{aligned}$$

ارتفاع بادبادک = $BD = BC + CD = 5 + 1/8 = 51/8 \text{ m}$

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۵

گزینه درست: null

سوال ۱۴

$$A = \frac{2(\sqrt{3})^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)(1)^2} = \frac{6 - \sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2(6 - \sqrt{3})}{3}$$

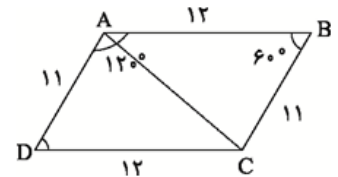
متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۵

زاویه‌ی حاده این متوازی‌الاضلاع برابر با $60^\circ = 180^\circ - 120^\circ$ است.



$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC}$$

$$\begin{aligned}S_{ABCD} &= 2 \times \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin 60^\circ \\ &= 12 \times 11 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 66\sqrt{3}\end{aligned}$$

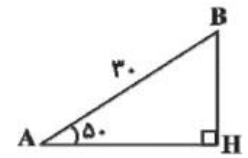
متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۵

گزینه درست: null

سوال ۱۶

$$\sin 50^\circ = \frac{BH}{30} \Rightarrow BH = 30 \left(\frac{77}{100} \right)$$



$$BH = 23/1 \text{ متر}$$

دشواری

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۷

در مثلث ABH داریم:

$$AB = \frac{۳}{\sin \alpha}$$

از طرفی $\hat{C} = \alpha$ و در مثلث ABC داریم:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan \alpha} = \frac{۳}{\sin \alpha \tan \alpha}$$

نهایتاً در مثلث ACH داریم:

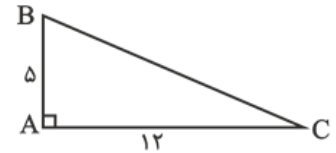
$$x = AC \cos \alpha = \frac{۳ \cos \alpha}{\sin \alpha \tan \alpha} = ۳ \cot^2 \alpha$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۱۸

با توجه به مثلث قائم‌الزاویه ABC در شکل زیر، اگر $AB = ۵$ و $AC = ۱۲$ باشد، آن‌گاه $\tan C = \frac{۵}{۱۲}$ است و خواهیم داشت:

$$BC = \sqrt{۲۵ + ۱۴۴} = ۱۳ \Rightarrow \cos B = \frac{۵}{۱۳} \text{ و } \cos C = \frac{۱۲}{۱۳}$$

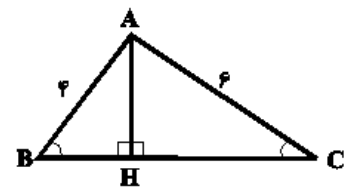
$$\Rightarrow \cos B + \cos C = \frac{۱۷}{۱۳}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۱۹

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

$$\cos \hat{B} = \frac{BH}{۴}, \cos \hat{C} = \frac{CH}{۶}$$

$$\Rightarrow ۲ \cos \hat{B} + ۳ \cos \hat{C} = ۲\left(\frac{BH}{۴}\right) + ۳\left(\frac{CH}{۶}\right) = \frac{BH}{۲} + \frac{CH}{۲}$$

$$= \frac{BH + CH}{۲} = \frac{BC}{۲} = \frac{۸}{۲} = ۴$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

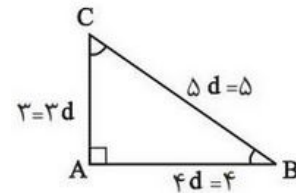
سوال ۲۰

اضلاع مثلث قائم‌الزاویه که تشکیل دنباله حسابی می‌دهند را به صورت $a-d$, a , $a+d$ در نظر می‌گیریم که با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2 \Rightarrow a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + a^2 - 2ad + d^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 4ad = 0 \Rightarrow a(a-4d) = 0 \xrightarrow{a>0} a = 4d$$

پس وقتی اضلاع مثلث ABC تشکیل دنباله حسابی می‌دهند که طول اضلاع آن از کوچک به بزرگ $3d$, $4d$, $5d$ باشند، پس:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (3d)(4d) = 6d^2 = 6$$

$$\Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = 1$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}$$

$$\text{مقدار عبارت} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{4}{3}} = \frac{21}{20}$$

توجه کنید اگر در رسم شکل جای دو رأس B و C عوض شود، جواب دیگر سؤال برابر با $\frac{28}{15}$ به دست می‌آید.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۱

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 \alpha \times \cot \alpha > 0 \Rightarrow \underbrace{\cot \alpha, \cos \alpha}_{\text{هم علامت}} \\ \cos \alpha + \cot \alpha < 0 \Rightarrow \underbrace{\cos \alpha, \cot \alpha}_{\text{هر دو منفی}} \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \text{ در ناحیه دوم است}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۲

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2 \cos x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 3 - 2 \cos x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq A \leq 5$$

$$-1 \leq \sin y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 3 \sin^2 y \leq 3$$

$$\Rightarrow 2 \leq 2 + 3 \sin^2 y \leq 5 \Rightarrow 2 \leq B \leq 5$$

حداکثر عبارت A برابر با ۵ و حداقل عبارت B برابر با ۲ است، پس خواسته سؤال $5 + 2 = 7$ است.

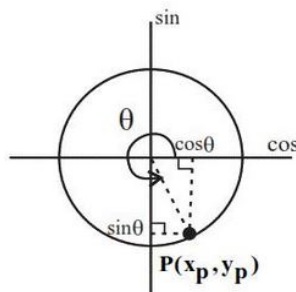
دشواری

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۳

مطابق شکل زیر نقطه P را روی دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم:



از آنجایی که $\sin \theta = y_p$ و $\cos \theta = x_p$ بوده و p در ربع چهارم است، آن‌گاه $x_p > 0$ و $y_p < 0$ خواهیم داشت:

$$\tan \theta = \frac{y_p}{x_p} = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_p = -3y_p \quad (1)$$

$$x_p^2 + y_p^2 = 1 \xrightarrow{(1)} 9y_p^2 + y_p^2 = 1 \Rightarrow y_p^2 = \frac{1}{10}$$

$$\xrightarrow{y_p < 0} y_p = \sin \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\xrightarrow{(1)} x_p = \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10} \cot \theta = \frac{x_p}{y_p} = -3$$

$$\sin \theta + \cos \theta \cot \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} \times (-3) = -\frac{10\sqrt{10}}{10} = -\sqrt{10}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۴

چون $\sin^2 \alpha \geq 0$ و $\sin^2 \alpha \cos \alpha < 0$ است، پس $\cos \alpha$ منفی است. در نتیجه انتهای کمان α در ناحیه دوم یا سوم مثلثاتی قرار دارد.

همچنین چون $\cos \alpha \tan \alpha < 0$ است، یعنی $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ مختلف‌العلامت هستند، یعنی انتهای کمان α در ناحیه سوم یا چهارم مثلثاتی است. از اشتراک شرط‌های به‌دست آمده، نتیجه می‌گیریم α در ناحیه سوم مثلثاتی است.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۵

اگر انتهای کمان α در دایره مثلثاتی نقطه P باشد، مختصات P به صورت

$$\text{است.} \begin{cases} y_P = \sin \alpha \\ x_P = \cos \alpha \end{cases}$$

چون $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ است، نقطه‌ای به عرض $-\frac{3}{5}$ است.

$$\text{رابطه فیثاغورس: } x_P^2 + y_P^2 = 1$$

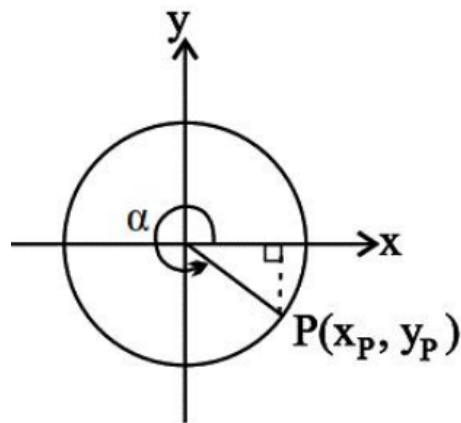
$$\Rightarrow x_P^2 + \frac{9}{25} = 1$$

$$\Rightarrow x_P^2 = \frac{16}{25} \xrightarrow{x_P > 0} x_P = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = x_P = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha + 2 \tan \alpha = \frac{4}{5} - \frac{6}{4} = \frac{16 - 30}{20} = \frac{-14}{20} = -\frac{7}{10}$$



دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۲۶

نقطه P روی دایره مثلثاتی است، پس $x_P = \cos \alpha$ ، $y_P = \sin \alpha$ و $\tan \alpha = \frac{y_P}{x_P}$ است.

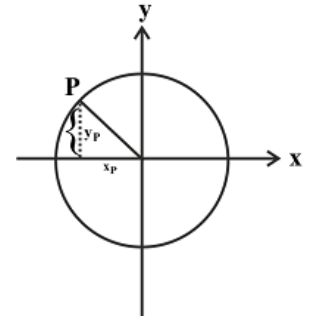
$$\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \frac{y_P}{x_P} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y_P = -\frac{2\sqrt{5}}{5} x_P \quad (1)$$

$$\xrightarrow{x_P^2 + y_P^2 = 1} \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} x_P\right)^2 + x_P^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} x_P^2 + x_P^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5} x_P^2 = 1 \Rightarrow x_P^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow x_P = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{در ناحیه دوم است } \alpha} x_P = -\frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow{(1)} y_P = \frac{2}{3}$$



$$P\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \text{مجموع مؤلفه‌ها} = \frac{2 - \sqrt{5}}{3}$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

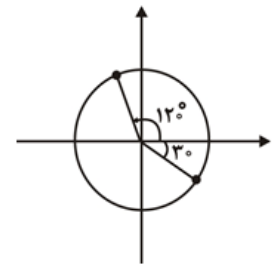
گزینه درست: null

سوال ۲۷

$$\cos 120^\circ < \cos \theta \leq \cos 0^\circ$$

$$\Downarrow \\ -\frac{1}{2} < \cos \theta \leq 1$$

$$\sin(-30^\circ) \leq \sin \theta \leq \sin 90^\circ \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1$$



متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۲۸

$$1 - \sin \theta = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{1}{4} < 0$$

پس θ در ناحیه سوم یا چهارم قرار دارد.

$$\cot \theta \cdot \underbrace{\sin \theta}_{> 0} > 0 \Rightarrow \cot \theta < 0$$

θ در ناحیه دوم یا چهارم است.

طبق اشتراک جواب‌ها، θ در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۲۹

چون $0^\circ < \alpha < 270^\circ$ است، پس α در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد که در ناحیه‌ی سوم کسینوس عددی بین -۱ و صفر است و داریم:

$$\begin{aligned} -1 < \cos \alpha < 0 &\Rightarrow -1 < \frac{1-2m}{3} < 0 \xrightarrow{\times 3} -3 < 1-2m < 0 \\ \xrightarrow{+(-1)} &\rightarrow -4 < -2m < -1 \\ \xrightarrow{\div(-2)} &\rightarrow \frac{1}{2} < m < 2 \Rightarrow m \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \end{aligned}$$

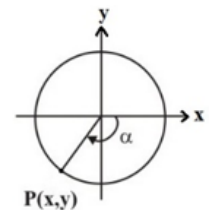
متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۰

(الف)



(ب)

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = 2x \\ x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (2x)^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = +\frac{\sqrt{5}}{5} & \text{ق ق غ} \\ x = -\frac{\sqrt{5}}{5} & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

چون x در ناحیه سوم منفی است.

$$\Rightarrow y = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cot \alpha = \frac{1}{2}$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۳۱

نقطه P روی دایره مثلثاتی است، پس $x_p = \cos \alpha$ و $y_p = \sin \alpha$ و $\cot \alpha = \frac{x_p}{y_p}$ است.

$$(*) \cot \alpha = -r \Rightarrow \frac{x_p}{y_p} = -r \Rightarrow x_p = -r y_p$$

$$\xrightarrow{x_p^2 + y_p^2 = 1} (-r y_p)^2 + y_p^2 = 1 \Rightarrow 5 y_p^2 = 1 \Rightarrow y_p = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه چهارم است}} y_p = -\frac{1}{\sqrt{5}} \xrightarrow{(*)} x_p = \frac{r}{\sqrt{5}}$$

مختصات P به صورت $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ است که برابر با $(\frac{r}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ می شود.

دانش آموزان عزیز: در تعیین علامت $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$ به موقعیت α در دایره مثلثاتی توجه کنید.

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۵

گزینه درست: null

سوال ۳۲

$$\text{شیب خط} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y \frac{\sqrt{3}}{3} x + b \xrightarrow{(-1,0)} b = -1$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} x - 1$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۳۳

$$\frac{r + \sin \theta + r \cos \theta + \sin \theta \cos \theta}{\tan \theta} = \frac{(r + \sin \theta) + \cos \theta (r + \sin \theta)}{\tan \theta}$$

$$= \frac{(r + \sin \theta)(1 + \cos \theta)}{\tan \theta} > \frac{r + \sin \theta > 1}{1 + \cos \theta > 0} \rightarrow \tan \theta > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} > 0 \xrightarrow{\cos \theta < 0} \sin \theta < 0$$

اگر \sin و \cos کمانی منفی باشند، انتهای آن کمان در ناحیه سوم قرار دارد.

ساده

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۴

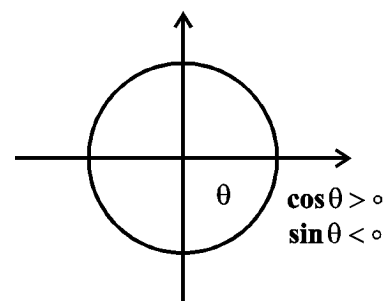
$$\tan \theta < 0 \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} < 0 \Rightarrow \text{هم علامت نیستند } \sin \theta \text{ و } \cos \theta$$

$$\cos \theta \times \cot \theta < 0 \Rightarrow \cos \theta \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} < 0 \Rightarrow \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} < 0$$

$\cos^2 \theta$ مقداری همواره نامنفی دارد، پس باید $\sin \theta < 0$ باشد.

چون $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ هم علامت نیستند، پس $\cos \theta > 0$ است.

پس θ در ناحیه چهارم قرار دارد.



متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۳۵

$$\cos^3 \alpha \times \cot \alpha > 0 \rightarrow \underbrace{\cot \alpha, \cos \alpha}_{\text{هم علامت}} \quad (I)$$

$$\cos \alpha + \cot \alpha < 0 \xrightarrow{(I)} \underbrace{\cos \alpha, \cot \alpha}_{\text{هر دو منفی}}$$

چون $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ هر دو منفی هستند، پس α در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۶

$$\cos^3 \alpha \times \cot \alpha > 0 \rightarrow \underbrace{\cot \alpha, \cos \alpha}_{(I)} \quad (I)$$

هم علامت

$$\cos \alpha + \cot \alpha < 0 \xrightarrow{(I)} \underbrace{\cos \alpha, \cot \alpha}_{(I)}$$

هر دو منفی

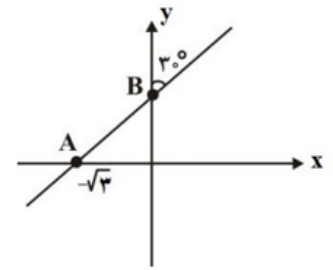
چون $\cos \alpha$ و $\cot \alpha$ هر دو منفی هستند، پس α در ناحیه دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد.

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۷



$$\widehat{OBA} + \widehat{OAB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OAB} = 60^\circ$$

$$\text{شیب خط} : \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \sqrt{3}(x - (-\sqrt{3}))$$

$$y = \sqrt{3}x + 3$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳۸

چون $1 \leq \cos \alpha \leq 1$ پس $-1 \leq -\cos \alpha \leq 1$ و در نتیجه همواره:

$$0 \leq 1 - \cos \alpha \leq 2$$

طبق سوال $0 < (\sin \alpha)(1 - \cos \alpha) < 2$ است، پس باید $\sin \alpha$ مثبت باشد، یعنی α در ربع اول یا دوم می‌باشد.

ساده

تشریحی ۱۳۹۴

گزینه درست: null

سوال ۳۹

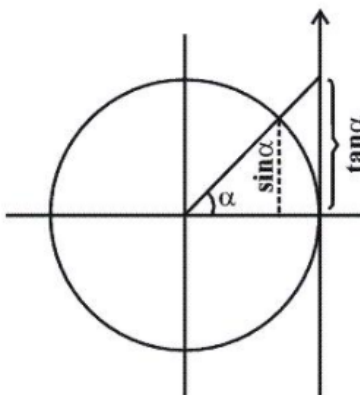
$$\tan \alpha > \sin \alpha \Rightarrow \tan \alpha - \sin \alpha > 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha > 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} > 0$$

$$\xrightarrow{\text{همواره مثبت } 1 - \cos \alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \tan \alpha > 0$$

پس α در ناحیهی اول و سوم قرار دارد.

راه حل دوم: در ناحیهی سوم مقدار $\tan \alpha$ مثبت و $\sin \alpha$ منفی است پس $\tan \alpha > \sin \alpha$.



همچنین در ناحیهی اول با توجه به شکل مقابل داریم:

$$\tan \alpha > \sin \alpha$$

دشواری

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۴۰

$$\frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{1 - 0} = 2$$

دشواری

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۴۱

$$\frac{\frac{3 \sin \theta + 5 \cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta}} = \frac{3 \tan \theta + 5}{\tan \theta - 1} = \frac{3 \left(\frac{4}{3} \right) + 5}{\frac{4}{3} - 1} = \frac{9}{\frac{1}{3}} = 27$$

متوسط

تکاج ۱۳۸۴

گزینه درست: null

سوال ۴۲

در این موارد، اغلب کارکردن با توان های دوم سینوس و کسینوس، آسان تر از کارکردن با خود توابع است. با شروع از طرف راست، ضرب کردن صورت و مخرج در عبارت $(1 - \cos \theta)$ کارساز است. (این عمل مشابه عمل گویاکردن کسرهاست.)

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \quad \text{عملیات جبری}$$

$$= \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \quad \text{عملیات جبری}$$

$$= \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \quad \text{اتحاد فیثاغورثی}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{عملیات جبری}$$

متوسط

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴۳

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 = 1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta = 1 - 2\cos^2 \theta$$

پس اتحاد اول برقرار است.

(ب)

$$\begin{aligned} & (\sin \theta - \cos \theta)^2 + 2 \cot \theta \sin^2 \theta \\ &= \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_1 - 2 \sin \theta \cos \theta + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 \end{aligned}$$

پس اتحاد دوم نیز برقرار است.

(استفاده از هر روش صحیح دیگر برای اثبات صحت اتحادها قابل قبول است.)

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴۴

همانطور که می‌دانیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (1)$$

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\sqrt{27}}{8} \xrightarrow{(1)} \cos^3 \alpha = \frac{\sqrt{27}}{8} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \xrightarrow{\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}} \sin^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{چون در ربع اول}} \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ساده

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۴۵

$$(1 - \sin^2 \theta) \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = \cos^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = 1$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۴۶

با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ داریم:

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\tan^2 \alpha - 1}} &= 1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{(\tan^2 \alpha + 1)(\tan^2 \alpha - 1)}} \\ &= 1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} (\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1)}} = 1 - \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} (\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha})}} \\ &= 1 - \sqrt{\cos^2 \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

سوال ۴۷ گزینه درست: null تشریحی ۱۳۹۹ دشوار

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} &= \frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} \\ &= \frac{2}{1-\sin^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} \\ \Rightarrow \text{کل عبارت} &= \frac{2}{\cos^2\theta} - 2\tan^2\theta = \frac{2}{\cos^2\theta} - \frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{2-2\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2(1-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 2 \end{aligned}$$

سوال ۴۸ گزینه درست: null تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

می‌دانیم که $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ می‌باشد، بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = a &\Rightarrow \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = a \\ \xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} &\frac{1+\cos x}{\sin x(1+\cos x)} = a \Rightarrow \frac{1}{\sin x} = a \quad (*) \end{aligned}$$

از طرفی:

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \xrightarrow{(*)} 1 + \cot^2 x = a^2$$

سوال ۴۹ گزینه درست: null تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

$$\begin{aligned} \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x(1-\cos x)} &= \frac{\overbrace{(1+\cos x)(1-\cos x)}^{\text{تحد مزوج}} - \sin^2 x}{\sin^2 x(1-\cos x)} \\ &= \frac{(1-\cos^2 x) - \sin^2 x}{\sin^2 x(1-\cos x)} = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x(1-\cos x)} = \frac{0}{\sin^2 x(1-\cos x)} = 0 \end{aligned}$$

سوال ۵۰ گزینه درست: null تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

$$\begin{aligned} 3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1 &\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 9 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 6 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \\ \Rightarrow 8 \cos^2 \alpha + \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1 - 6 \sin \alpha \cos \alpha &= 1 \\ \Rightarrow 8 \cos^2 \alpha = 6 \sin \alpha \cos \alpha &\xrightarrow{\cos \alpha \neq 0} \tan \alpha = \frac{4}{3} \\ \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{16}{9} &= \frac{25}{9} \\ \xrightarrow{\cos \alpha > 0} \cos \alpha = \frac{3}{5} &\xrightarrow{\tan \alpha = \frac{4}{3}} \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha &= \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} \end{aligned}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۵۱

$$(1 - \sin^2 \theta)(\sqrt{1 + \tan^2 \theta}) = (\cos^2 \theta)(1 + 1 + \tan^2 \theta)$$

$$= \cos^2 \theta \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}\right) = \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \cos^2 \theta + 1 = A^2 + 1$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۲

ابتدا صورت و مخرج کسر زیر هر رادیکال را در مزدوج مخرج آن ضرب کرده و ساده می‌کنیم، داریم:

$$A = \sqrt{\frac{(1 + \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}} - \sqrt{\frac{(1 - \sin x)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}}$$

$$A = \sqrt{\frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}} - \sqrt{\frac{(1 - \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}}, \quad 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$A = \frac{|1 + \sin x|}{|\cos x|} - \frac{|1 - \sin x|}{|\cos x|}$$

چون $0 < x < 90^\circ$ است، پس $\cos x > 0$ ، $1 + \sin x > 0$ و $1 - \sin x > 0$ می‌باشد، در نتیجه قدرمطلقها را بر می‌داریم، پس:

$$A = \frac{1 + \sin x}{\cos x} - \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 + \sin x - 1 + \sin x}{\cos x} = 2 \tan x$$

دشواری

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۵۳

از اتحاد مربع دو جمله‌ای و نیز اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ استفاده می‌کنیم.

$$3 \tan^6 \alpha + 8 \tan^4 \alpha + 4 = 49$$

$$\Rightarrow 3(\tan^2 \alpha + 1)^3 = 49 \Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{7}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{7} \Rightarrow 7 \cos^2 \alpha + 1 = 4$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۴

$$\frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} = 2 \Rightarrow 2 \sin x + \cos x = 2 \sin x + 4 \cos x$$

$$\Rightarrow 3 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \xrightarrow{0 \leq x \leq 180^\circ} x = 90^\circ$$

$$A = \sin(180^\circ + x) + \cos(180^\circ + x) + \cos 2x$$

$$= \sin 270^\circ + \cos 270^\circ + \cos 180^\circ = -1 + 0 - 1 = -2$$

دشوار

تکاج ۱۳۸۴

گزینه درست: null

سوال ۵۵

با شروع از طرف چپ، تبدیل به سینوس و کسینوس را انجام دهید، سپس کسر مرکب را که از ضرب کردن صورت و مخرج در $\cos x \cos y$ ، به دست می آید. ک.م.م کسرهای داخلی ساده کنید:

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \quad \text{اتحاد خارج قسمت}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} \cdot \frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} \quad \text{عملیات جبر}$$

$$= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \quad \text{عملیات جبری}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۵۶

با توجه به روابط مثلثاتی، می دانیم که:

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

حال داریم:

$$A = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} \times \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \times \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}}}$$

$$= \frac{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha}} \times \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{1}{|\sin \alpha|}}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\cos \alpha |\sin \alpha|}{\sin \alpha} \xrightarrow{\substack{\text{انتهای } \alpha \text{ در ناحیه چهارم} \\ |\sin \alpha| = -\sin \alpha}}$$

$$A = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times -\cos \alpha = -\sin \alpha$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۷

$$A = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 + \sin^2 \alpha) + (1 + \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{1 - \sin^4 \alpha + 1 - \cos^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 - (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 - 1}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۸

$$\begin{aligned}
 A &= \tan 20^\circ \left(1 - \frac{1}{\sin^2 20^\circ}\right) \\
 &= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 20^\circ}\right) \\
 &= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} - \frac{1}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sin^2 20^\circ - 1}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} \\
 &\xrightarrow{\cos^2 20^\circ = 1 - \sin^2 20^\circ} A = \frac{-\cos^2 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} \\
 &= \frac{-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = -\frac{1}{\tan 20^\circ}
 \end{aligned}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۵۹

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^3 - 3 \tan^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \\
 &= (1 + \tan^2 x)^3 - 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \\
 A &= 1 + 3 \tan^2 x + 3 \tan^4 x + \tan^6 x - 3 \tan^2 x - 3 \tan^4 x \\
 &= 1 + \tan^6 x
 \end{aligned}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۶۰

$$\begin{aligned}
 \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 16 &\xrightarrow{+2} \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \times 1 = 18 \\
 \xrightarrow{\tan \alpha \cot \alpha = 1} \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha &= 18 \\
 \Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 &= 18 \\
 \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha &= \pm \sqrt{18} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه دوم است پس } \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0, \text{ هر دو منفی هستند}} \\
 \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha &= -\sqrt{18} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\sqrt{18} \\
 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} &= -\sqrt{18} \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\sqrt{18} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{18}} \\
 \Rightarrow A = \sin \alpha - \cos \alpha \Rightarrow A^2 &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
 &= 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{18}}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

چون در ناحیه دوم $\sin \alpha$ مثبت و $\cos \alpha$ منفی است، پس $\sin \alpha - \cos \alpha$ مثبت است، یعنی $A = \sqrt{\frac{3}{2}}$ قابل قبول است.